

1. Στο τμήμα ανδρικών ενδυμάτων ενός μεγάλου καταστήματος εργάζεται ένας ράφτης για τις μεταποιήσεις των κοστούμιών των πελατών. Ο αριθμός των πελατών που ζητούν μεταποίηση ακολουθεί κατανομή Poisson με μέσο ρυθμό αφίξεων 24 ανά ώρα. Οι μεταποιήσεις που ζητούν οι πελάτες γίνονται με προτεραιότητα FIFO ενώ οι τελευταίοι είναι πάντα πρόθυμοι να περιμένουν για τις υπηρεσίες του ράφτη επειδή οι μεταποιήσεις είναι δωρεάν. Ο χρόνος που απαιτεί η μεταποίηση του κοστούμιού ενός πελάτη ακολουθεί εκθετική κατανομή με μέση τιμή 2 λεπτά. (α) Ποιος είναι ο μέσος αριθμός πελατών στην αίθουσα μεταποιήσεων; (β) Πόσος είναι ο αναμενόμενος χρόνος που θα περιμένει ένας πελάτης στην αίθουσα μεταποιήσεων; (γ) Ποιο ποσοστό του χρόνου είναι αδρανής ο ράφτης; (δ) Ποια είναι η πιθανότητα ότι ένας πελάτης θα περιμένει περισσότερα από 10 λεπτά για τις υπηρεσίες του ράφτη;
2. Σε ένα αεροδρόμιο με ένα διάδρομο τα αεροσκάφη ζητούν άδεια προσγείωσης με κατανομή Poisson με μέσο όρο ένα αεροσκάφος κάθε 5 λεπτά. Όποιο αεροσκάφος φτάσει πρώτο προσγειώνεται πρώτο ενώ εκείνα που δεν μπορούν να προσγειωθούν αμέσως περιμένουν να προσγειωθούν. Ο χρόνος που απαιτείται από τον εναέριο ελεγκτή για την προσγείωση του αεροσκάφους ποικίλει, ακολουθώντας εκθετική κατανομή με μέσο χρόνο 3 λεπτά. Να προσδιοριστεί: (α) ο μέσος αριθμός αεροσκαφών που ζήτησαν άδεια προσγείωσης. (β) Ο μέσος αριθμός αεροσκαφών που ζήτησαν άδεια προσγείωσης και βρίσκονται ακόμη σε αναμονή (γ) η πιθανότητα ότι ένα αεροσκάφος που φτάνει θα προσγειωθεί σε λιγότερο από 10 λεπτά από την πρώτη αίτησή του για άδεια προσγείωσης και (δ) η πιθανότητα να υπάρχουν περισσότερα από 3 αεροσκάφη σε αναμονή.
3. Μια μικρή τράπεζα έχει δύο ταμίες που είναι εξίσου αποδοτικοί και μπορούν να χειριστούν κατά μέσο όρο 60 συναλλαγές πελατών ανά ώρα ο καθένας, ενώ οι χρόνοι εξυπηρέτησης ακολουθούν εκθετική κατανομή. Οι πελάτες έρχονται στην τράπεζα σύμφωνα με την κατανομή Poisson, με μέσο ρυθμό 100 την ώρα. Προσδιορίστε (α) την πιθανότητα να υπάρχουν περισσότεροι από τρεις πελάτες στην τράπεζα (β) την πιθανότητα να είναι αδρανής κάποιος ταμίας.
4. Σε έναν αγροτικό δρόμο υπάρχει ένας σταθμός εξυπηρέτησης με μόνο μία αντλία παροχής βενζίνης. Τα αυτοκίνητα προσέρχονται στο σταθμό για βενζίνη σύμφωνα την κατανομή Poisson με μέσο ρυθμό 10 την ώρα. Ο χρόνος που απαιτείται για την εξυπηρέτηση ενός αυτοκινήτου ακολουθεί εκθετική κατανομή, με μέσο όρο τα 2 λεπτά. Ο σταθμός μπορεί να υποδεχθεί τέσσερα αυτοκίνητα το πολύ, ενώ οι τοπικοί κανόνες οδικής κυκλοφορίας απαγορεύουν στα αυτοκίνητα να περιμένουν στο δρόμο. Προσδιορίστε (α) το μέσο αριθμό αυτοκινήτων που βρίσκονται ταυτόχρονα στο σταθμό, (β) το μέσο χρόνο που πρέπει να περιμένει ένας πελάτης για να εξυπηρετηθεί μόλις καταφέρει να εισέλθει στο σταθμό, (γ) το μέσο ρυθμό απώλειας κέρδους από πελάτες που απευθύνονται αλλού όταν ο σταθμός είναι γεμάτος, αν οι μέσες πωλήσεις είναι 15€.
5. Ένα πλυντήριο αυτοκινήτων αυτο-εξυπηρέτησης (self-service) έχει τέσσερις θέσεις στις οποίες οι πελάτες μπορούν να καθαρίσουν τα αυτοκίνητα τους, καθώς και ένα χώρο που χωράει το πολύ τρία αυτοκίνητα όταν όλες οι θέσεις πλυσίματος είναι γεμάτες. Οι πελάτες προσέρχονται στο πλυντήριο αυτοκινήτων σύμφωνα με μια διαδικασία Poisson, με μέσο ρυθμό 15 την ώρα. Αν δεν υπάρχει χώρος για αυτούς στις εγκαταστάσεις του πλυντηρίου αυτοκινήτων, οι πελάτες που προσέρχονται πρέπει να πάνε αλλού. Ο χρόνος που απαιτείται για να εξυπηρετηθεί ένα αυτοκίνητο ακολουθεί εκθετική κατανομή με μέσο όρο τα 12 λεπτά. Προσδιορίστε (α) το μέσο αριθμό αυτοκινήτων που βρίσκονται στο πλυντήριο αυτοκινήτων κάθε στιγμή, και (β) τον αναμενόμενο ρυθμό με τον οποίο δεν επιτρέπεται στα αυτοκίνητα να εισέλθουν στο πλυντήριο αυτοκινήτων.
6. Ο χώρος στάθμευσης των επισκεπτών σε ένα ίδρυμα περιορίζεται σε 5 μόνο θέσεις. Τα αυτοκίνητα που κάνουν χρήση αυτού του χώρου φθάνουν σύμφωνα με την κατανομή Poisson με ρυθμό 6 αυτοκίνητα την ώρα. Ο χρόνος παραμονής στο χώρο στάθμευσης είναι εκθετικά κατανομημένος με μέση τιμή 30 λεπτά. Οι επισκέπτες που δεν μπορούν να βρουν μία κενή θέση κατά την άφιξή τους, μπορούν προσωρινά να περιμένουν μέσα στο χώρο στάθμευσης μέχρι να φύγει κάποιο σταθμευμένο αυτοκίνητο. Αυτός ο προσωρινός χώρος επαρκεί για τρία αυτοκίνητα. Τα αυτοκίνητα που δεν μπορούν να σταθμεύσουν ή να βρουν κάποιο προσωρινό χώρο αναμονής πρέπει να μεταβούν αλλού. Να προσδιοριστεί:
1. Η πιθανότητα p_n των n αυτοκινήτων στο σύστημα.
 2. Ο ενεργός ρυθμός άφιξης των αυτοκινήτων που χρησιμοποιούν πραγματικά το χώρο στάθμευσης.
 3. Το μέσο αριθμό αυτοκινήτων στο χώρο στάθμευσης.
 4. Το μέσο χρονικό διάστημα που ένα αυτοκίνητο περιμένει για να βρει να σταθμεύσει μέσα στο χώρο στάθμευσης.
7. Μια κοινότητα εξυπηρετείται από δύο εταιρείες ταξί. Η κάθε εταιρεία έχει δύο ταξί και αμφότερες οι εταιρείες κατέχουν το μισό μερίδιο αγοράς, με τις κλήσεις να φτάνουν στο γραφείο διεκπεραίωσης της κάθε εταιρείας με μέσο ρυθμό 8 τηλεφωνήματα την ώρα. Ο μέσος χρόνος διαδρομής είναι 12 λεπτά. Οι κλήσεις

φθάνουν σύμφωνα με κατανομή Poisson και ο χρόνος διαδρομής είναι εκθετικός. Οι δύο εταιρείες έχουν αγοραστεί από έναν επενδυτή και θα συγχωνευθούν σε ένα απλό γραφείο διεκπεραίωσης. Να αναλύσετε την πρόταση του νέου ιδιοκτήτη.

8. Ένας επενδυτής επενδύει κατά μέσο όρο 1000 δολάρια το μήνα στο χρηματιστήριο σε μια μετοχή. Επειδή ο επενδυτής πρέπει να περιμένει για μία καλή ευκαιρία "αγοράς" ο πραγματικός χρόνος της αγοράς είναι τυχαίος. Ο επενδυτής συνήθως διατηρεί τη μετοχή κατά μέσο για τρία έτη αλλά την πωλεί σε τυχαίες χρονικές στιγμές όταν παρουσιαστεί κάποια καλή ευκαιρία "πώλησης". Η προηγούμενη εμπειρία δείχνει πως περίπου το 25% των μετοχών που επενδύει έχουν πωτική τάση κατά 20% το έτος ενώ το υπόλοιπο 75% αυξητική τάση κατά 12% το χρόνο. Να εκτιμηθεί η (μακροπρόθεσμη) μέση ετήσια αξία του κεφαλαίου του εκτιμητή. Να υπολογιστεί η πιθανότητα ο επενδυτής να εκποιήσει πλήρως.

9. Σε μια πολιτεία της Αμερικής οι νέοι οδηγοί απαιτείται να περάσουν από γραπτές εξετάσεις πριν δώσουν τις εξετάσεις οδήγησης. Αυτές οι εξετάσεις εποπτεύονται από το τμήμα της δημοτικής αστυνομίας. Τα αρχεία σε μια συγκεκριμένη πόλη της δείχνουν ότι ο μέσος αριθμός γραπτών εξετάσεων είναι 100 ανά ημέρα (των 8 ωρών). Ο μέσος χρόνος που απαιτείται για να ολοκληρωθεί η εξέταση είναι περίπου 30 λεπτά. Η πραγματική άφιξη αυτών που δίνουν την εξέταση και ο χρόνος που καθένας τους αφιερώνει στο τεστ είναι τυχαίος, με τις αφίξεις να ακολουθούν κατανομή Poisson και το χρόνο εξέτασης να είναι εκθετικός. Να προσδιοριστούν:

- 1) Ο μέσος αριθμός καθισμάτων που πρέπει να τοποθετηθούν στην αίθουσα των εξετάσεων.
- 2) Η πιθανότητα ότι ο αριθμός αυτών που συμμετέχουν στις εξετάσεις θα υπερβεί το μέσο αριθμό των καθισμάτων που υπάρχουν στην αίθουσα εξετάσεων όπως υπολογίστηκε το προηγούμενο ερώτημα.
- 3) Η πιθανότητα να μη γίνουν εξετάσεις μια τυχαία ημέρα (λόγω μη συμμετοχής).

10. Ένα κέντρο εξυπηρέτησης έχει 2 θέσεις εξυπηρέτησης και χώρο αναμονής που χωράει 2 πελάτες. Οι πελάτες φθάνουν στο κέντρο τυχαία, σύμφωνα με την κατανομή Poisson, με ρυθμό 12 πελάτες ανά ώρα. Όταν ο χώρος αναμονής είναι γεμάτος, οι πελάτες που φθάνουν στο σταθμό δεν εισέρχονται σε αυτόν αλλά πάνε σε άλλο σταθμό. Ο χρόνος εξυπηρέτησης ενός πελάτη ακολουθεί εκθετική κατανομή με μέσο 5 λεπτά. Τα έσοδα του σταθμού από κάθε πελάτη που εξυπηρετείται είναι 23 ευρώ. Το κόστος λειτουργίας κάθε θέσης εξυπηρέτησης, όταν αυτή εξυπηρετεί, είναι 92 ευρώ ανά ώρα, ενώ το κόστος του σταθμού από την αναμονή των πελατών είναι 460 ευρώ ανά ώρα αναμονής για κάθε πελάτη που περιμένει. Ποιο είναι το κέρδος του σταθμού ανά ώρα;

11. Ένα παντοπωλείο έχει ένα και μοναδικό ταμείο που εξυπηρετείται από έναν ταμιά, ο οποίος επίσης συσκευάζει τα αγορασμένα είδη των πελατών όταν το κατάστημα δεν είναι πολύ απασχολημένο. Οι πελάτες προσέρχονται στο ταμείο σύμφωνα με την κατανομή Poisson με μέσο ρυθμό 30 την ώρα. Ο χρόνος που χρειάζεται ο ταμίας για να υπολογίσει το σύνολο των αγορών ενός πελάτη, να βάλει σε σακούλες τα προϊόντα και να δώσει τα ρέστα ακολουθεί εκθετική κατανομή με μέσο όρο τα 2 λεπτά. Όποτε υπάρχουν τρεις ή περισσότεροι πελάτες στο ταμείο (συμπεριλαμβανομένου του πελάτη που εξυπηρετείται) δίνεται εντολή σε δεύτερο υπάλληλο του καταστήματος να βοηθά τον ταμιά στα καθήκοντα της συσκευασίας. Όταν οι δύο υπάλληλοι δουλεύουν μαζί, ο χρόνος εξυπηρέτησης των πελατών συνεχίζει να ακολουθεί εκθετική κατανομή, αλλά με μέση τιμή το 1 λεπτό. Να προσδιοριστεί

1. ο μέσος αριθμός πελατών που βρίσκονται στο ταμείο ταυτόχρονα,
2. η χρονική διάρκεια που θα πρέπει να αναμένει ένας πελάτης ότι θα δαπανήσει στο ταμείο
3. η χρονική διάρκεια παραμονής ενός πελάτη στην ουρά του ταμείου.

12. Ο ιδιοκτήτης ενός μικρού καταστήματος πώλησης εφημερίδων και ειδών καπνού εξυπηρετεί τους πελάτες του με μέσο όρο έναν κάθε 30 δευτερόλεπτα με το χρόνο εξυπηρέτησης να ακολουθεί την εκθετική κατανομή. Οι πελάτες προσέρχονται σύμφωνα με την κατανομή Poisson με μέσο ρυθμό 3 πελάτες στο λεπτό και μπορούν να περιμένουν αν ο ιδιοκτήτης είναι απασχολημένος εξυπηρετώντας άλλον πελάτη. Ένας αριθμός πελατών επιλέγει να μην περιμένει και απευθύνεται αλλού. Η πιθανότητα ότι ένας πελάτης που προσέρχεται θα αποφασίσει να ματαιώσει είναι $n/3$ όπου n είναι ο αριθμός πελατών που βρίσκονται ήδη στο κατάστημα. Πόσο κέρδος αναμένεται να χάσει ο ιδιοκτήτης από τους πελάτες που απευθύνονται αλλού αν το μέσο κέρδος ανά πελάτη είναι 1.5 ευρώ;